$$\deg(f, X, y_0) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{sgn}(\det f'(x_j))$$

APUNTES MAT 409

ANÀLISIS NO LINEAL

VERSIÓN 2016

SALOMÓN ALARCÓN ARANEDA

SALOMÓN ALARCÓN ARANEDA

APUNTES
MAT 409 | ANALISIS NO LINEAL

VERSIÓN 27/10/2015

Prefacio

Estimados alumnos, en el contexto de la asignatura MAT 409 que se dicta en nuestra Universidad, me es grato presentar este apuntes de Análisis No Lineal. El principal objetivo de estas notas es ofrecer un material de consulta acorde a los contenidos tratados en clases.

Es importante señalar que estos apuntes no reemplazan a los libros de la Bibliografía del programa de la asignatura, ni tampoco a los que cito en la Bibliografía al finalizar estos apuntes. Por esta razón, recomiendo revisar aquellos libros con la finalidad que puedan profundizar en el estudio de los contenidos aquí tratados y, de esta forma, puedan conocer puntos de vista diferentes a los expuestos aquí.

Agradezco desde ya los comentarios y sugerencias que ustedes puedan hacerme llegar para mejorar estas notas y corregir erratas que puedan existir. Para ello, pueden contactarme por correo e-mail a:

salomon.alarcon@usm.cl.

Espero que este material les sea de utilidad.

Atte.

Salomón Alarcón Araneda.

Valparaíso, 1 de Octubre de 2015

Índice general

Prefacio I

Índice general III

1. Linealización 1

1.1. Cálculo diferencial en espacios Banach . . . 1

1.1.1. Diferenciabilidad . . . 1

1.1.2. Derivadas de orden superior . . . 6

1.2. Teorema de la función implícita local . . . 12

1.2.1. Teorema de la función inversa local . . . 12

1.2.2. Teorema de la función implícita local . . . 13

1.3. Teorema de la función implícita global . . . 14

1.3.1. El método de continuidad . . . 14

1.3.2. Teorema de la función implícita global . . . 17

1.4. Algunas aplicaciones a ecuaciones diferenciales . . . 17

1.4.1. Existencia y unicidad de soluciones 2π-periódicas para una EDO . . . 17

1.4.2. Transformada de Legendre . . . 18

1.4.3. Cambio de coordenadas . . . 19

1.4.4. Problemas de valores propios no lineales . . . 19

1.4.5. Existencia y unicidad para un problema en EDP's . . . 21

2. Métodos de punto fijo 23

2.1. Los teoremas de punto fijo . . . 23

2.1.1. Teorema del punto fijo de Banach . . . 23

2.1.2. Teorema del punto fijo de Brouwer . . . 23

2.1.3. Teorema del punto fijo de Schauder . . . 24

2.1.4. Teorema del punto fijo de Schaefer . . . 24

2.2. Aplicaciones a ecuaciones diferenciales . . . 25

2.2.1. Existencia de una solución para una ecuación de segundo orden autoadjunta 25

2.2.2. Existencia de una solución para un problema de valores de frontera . . . 25

2.2.3. Existencia de soluciones de un problema semilineal elíptico 28

3. Teoría del grado topológico **29**
3.1. Preliminares 29
3.2. El grado de Brouwer 30
3.2.1. Propiedades del grado de Brouwer 35
3.3. Aplicaciones del grado 36

Bibliografía **37**

Capítulo 1

Linealización

El primer paso para estudiar un problema no lineal consiste en estudiar como linealizar tal problema. A continuación presentamos algunos tópicos relacionados con este proceso.

Para simplificar escritura, en estos apuntes consideramos los espacios normados $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ y $(Z, \|\cdot\|_Z)$ como espacios Banach, a menos que se señale otra cosa. Además, introducimos la siguiente notación, la que también usamos a lo largo de todos estos apuntes.

NOTACIÓN 1.0.1

- $L(X, Y)$ representa al espacio de todas las aplicaciones lineales continuas de X en Y.
- Sea $h \in X$ tal que $\|h\|_X$ es suficientemente pequeña (*i.e.* suficientemente cercana a cero). La expresión $o(\|h\|_X)$ se interpreta como

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(\|h\|_X)}{\|h\|_X} = 0.$$

1.1. Cálculo diferencial en espacios Banach

1.1.1. Diferenciabilidad

DEFINICIÓN 1.1.1 (Derivada de Fréchet) Sea Ω un conjunto abierto en X, sea $x_0 \in \Omega$ y sea $f : \Omega \to Y$ una aplicación. Decimos que f es *Fréchet diferenciable* en x_0 si existe $A \in L(X, Y)$ tal que

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah\|_Y = o(\|h\|_X) \quad \text{cuando } h \to 0.$$

La aplicación lineal continua A se denota por $f'(x_0)$ y se denomina *derivada de Fréchet de f en x_0*.

OBSERVACIÓN 1.1.1 *Cuando f es una aplicación Fréchet diferenciable en x_0, es usual decir simplemente que f es* **diferenciable** *en x_0.*

PROPOSICIÓN 1.1.1 (Unicidad de la derivada de Fréchet) Sea Ω un conjunto abierto en X, sea $x_0 \in \Omega$ y sea $f : \Omega \to Y$ una aplicación. Si f es diferenciable en x_0, entonces $f'(x_0)$ es única.

EJEMPLO 1.1.1 Sea $f : X \to Y$ la aplicación definida por $f(x) = Tx$, donde $T \in L(X,Y)$. Prueba que f es diferenciable en X y que se verifica que $f'(x) = T$ para cada $x \in X$.

EJEMPLO 1.1.2 Sea $f : X \to Y$ la aplicación definida por $f(x) = k$, para algún $k \in Y$ fijo. Prueba que f es diferenciable en X y que se verifica que $f'(x) = 0_{L(X,Y)}$ para cada $x \in X$.

EJERCICIOS 1.1.1 Sea Ω un conjunto abierto en X, sea $x_0 \in \Omega$ y sea $f : \Omega \to Y$ una aplicación.

1. Si $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ dos normas equivalentes en X, prueba que

$$f \text{ es diferenciable en } x_0 \text{ bajo la norma } \|\cdot\|_a \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ es diferenciable en } x_0 \text{ bajo la norma } \|\cdot\|_b.$$

2. Si f es diferenciable en x_0, prueba que f es continua en x_0.

OBSERVACIÓN 1.1.2

1. *En el espacio producto $X \times Y$, las siguientes normas son equivalentes*

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y; \quad \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2}; \quad \sup\{\|x\|_X + \|y\|_Y\}.$$

2. *Sea $B : X \times Y \to Z$ una aplicación bilineal. Se sabe que*

$$B \text{ es continua en } X\times Y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists C > 0) \text{ tal que } (\|B(x,y)\|_Z \leq C\|x\|_X\|y\|_Y \quad \forall (x,y) \in X\times Y).$$

EJEMPLO 1.1.3 Sea $B : X \times Y \to Z$ una aplicación bilineal continua. Encuentra $B'(x,y)$.

EJEMPLO 1.1.4 Sea H un espacio Hilbert con producto interno $(\cdot,\cdot)$, y sea $f : H \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{1}{2}(Tx,x)$, con $T \in L(H,H)$. Encuentra $f'(x)$.

OBSERVACIÓN 1.1.3 *Sea H un espacio Hilbert con producto interno $(\cdot,\cdot)$.*

- *Un operador A es simétrico en H si*

$$(Ax,y) = (x,Ay) \quad \forall x,y \in H.$$

- *Si en el Ejemplo 1.1.4 consideramos T como un operador lineal continuo simétrico, entonces*

$$f'(x)[h] = (Tx,h).$$

Luego,

$$f'(x) \in H^*,$$

donde H^* es el espacio dual de H.

Además, es usual escribir

$$\langle f'(x), h\rangle_{H^*,H} = f'(x)[h] = (Tx, h) \quad \forall h \in H$$

y poner

$$Tx = \nabla f(x).$$

- *Con mayor generalidad: Sea* Ω *un subconjunto abierto en* H *y sea* $x_0 \in \Omega$. *Si* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *es diferenciable en* x_0, *entonces existe un único elemento de* H, *que denotamos por* $\nabla f(x_0)$, *tal que*

$$\langle f'(x_0), h\rangle_{H^*,H} = (\nabla f(x_0), h) \quad \forall h \in H.$$

- *Notemos que* $f'(x_0) \in H^*$, *mientras que* $\nabla f(x_0) \in H$, *pero como* H *es Hilbert, podemos identificar* H *con su dual* H^*, *y en particular, identificar a* $f'(x_0)$, *que es un vector fila, con* $\nabla f(x_0)$, *que es un vector columna (i.e.* $f'(x_0)$ *es el elemento dual de* $\nabla f(x_0)$*).*

TEOREMA 1.1.1 (Regla de la cadena) Sea Ω un conjunto abierto en X, sea Λ un conjunto abierto en Y, sea $x_0 \in \Omega$ y sean $f : \Omega \to Z$ y $g : \Lambda \to Z$ aplicaciones tales que $f(\Omega) = Rec(f) \subset \Lambda = Dom(g)$. Si f es diferenciable en x_0 y g es diferenciable en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en x_0 y se verifica que

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

A continuación introducimos un concepto de derivada que es más débil que la derivada de Fréchet, pero que es igualmente útil desde el punto de vista del cálculo.

DEFINICIÓN 1.1.2 (Derivada de Gâteaux) Sea Ω un conjunto abierto en X, sea $x_0 \in \Omega$ y sea $f : \Omega \to Y$ una aplicación. Decimos que f es *Gâteaux diferenciable* en x_0 si para cada $h \in X$ existe $A \in L(X, Y)$ tal que

$$\|f(x_0 + th) - f(x_0) - tAh\|_Y = o(t) \quad \text{cuando } t \to 0.$$

La aplicación A se denota por $\mathrm{d}f(x_0)$, y se denomina *derivada de Gâteaux de* f *en* x_0.

OBSERVACIÓN 1.1.4 *Si* f *es Gâteaux diferenciable en* x_0, *es usual escribir*

$$(\forall h \in X)\left(\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}\right) \quad y \quad \left(\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = \mathrm{d}f(x_0)[h]\right),$$

o bien

$$(\forall h \in X)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + th)_{|t=0} = \mathrm{d}f(x_0)[h]\right).$$

OBSERVACIÓN 1.1.5 *Notar que si* f *es Gâteaux diferenciable en* x_0, *entonces*

$$(\forall h \in X)\left(\mathrm{d}f(x_0)[th] = t\,\mathrm{d}f(x_0)[h] \quad \forall t \in \mathbb{R}\right).$$

PROPOSICIÓN 1.1.2 (Unicidad de la derivada de Gâteaux) Sea Ω un conjunto abierto en X, sea $x_0 \in \Omega$ y sea $f : \Omega \to Y$ una aplicación. Si f es Gâteaux diferenciable en x_0, entonces $\mathrm{d}f(x_0)$ está únicamente determinada.

PROPOSICIÓN 1.1.3 Sea Ω un conjunto abierto en X, sea $x_0 \in \Omega$ y sea $f : \Omega \to Y$ una aplicación. Si f es Gâteaux diferenciable en x_0, entonces para cada $(h, y^*) \in X \times Y^*$, la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$t \mapsto \varphi(t) = \langle y^*, f(x_0 + th)\rangle$$

es diferenciable en $t = 0$, y se cumple que

$$\varphi'(0) = \langle y^*, \mathrm{d}f(x_0)[h]\rangle.$$

EJERCICIOS 1.1.2

1. Sea Ω un conjunto abierto en X, sea $x_0 \in \Omega$ y sea $f : \Omega \to Y$ una aplicación Fréchet diferenciable en x_0. Prueba que f es Gâteaux diferenciable en x_0, con

$$\mathrm{d}f(x_0)[h] = f'(x_0)[h] \qquad \forall h \in X.$$

   Adicionalmente, muestra que el recíproco no se cumple.

2. Muestra que existen funciones continuas en un punto que poseen derivadas direccionales en cualquier dirección al punto, pero que no son Gâteaux diferenciables en tal punto.

El Teorema del valor medio

El Teorema del valor medio en una variable dice lo siguiente:

Sea $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en $]a, b[$. Entonces

$$(\exists \xi \in]a, b[\,) \text{ tal que } (\phi(b) - \phi(a) = \phi'(\xi)(b - a)).$$

También se conoce una extensión de este resultado, a saber:

Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^N$ y sea $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en Ω. Entonces

$$(\forall x, y \in \Omega \text{ tal que } \mathrm{seg}[x, y] \subset \Omega)(\exists \xi \in\ [0, 1]) \text{ tal que } (\phi(y) - \phi(x) = \nabla\phi(x + \xi(y - x)) \cdot (y - x)).$$

Sin embargo, un enunciado como los anteriores no es válido para cualquier aplicación.

EJEMPLO 1.1.5 Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por

$$t \mapsto \phi(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Muestra que ϕ no cumple un teorema del valor medio como los mencionados anteriormente.

TEOREMA 1.1.2 (Teorema del valor medio) Sea Ω un conjunto abierto en X y sea $f : \Omega \to Y$ una aplicación Gâteaux diferenciable en Ω. Si $x, y \in \Omega$ son tales que $x + t(y - x) \in \Omega$ para cualquier $t \in [0, 1]$, entonces

$$\|f(y) - f(x)\|_Y \leq \sup_{t\in[0,1]} \|\mathrm{d}f(x + t(x - y))\|_{L(X,Y)} \|y - x\|_X.$$

Un resultado muy útil, que sirve para determinar cuando una aplicación Gâteaux diferenciable es Fréchet diferenciable, es el siguiente.

PROPOSICIÓN 1.1.4 Sea Ω un conjunto abierto en X y sea $f : \Omega \to Y$ una aplicación Gâteaux diferenciable en Ω. Si $\mathrm{d}f : \Omega \to L(X, Y)$ es continua en Ω, entonces f es Fréchet diferenciable en Ω y para cada $x \in \Omega$ se verifica que $f'(x) = \mathrm{d}f(x)$.

EJEMPLO 1.1.6 Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_M \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ y sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ la aplicación definida por

$$x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \cdots \\ \varphi_M(x) \end{pmatrix}.$$

Encuentra $f'(x)$.

EJEMPLO 1.1.7 Sea Ω un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^N$, sea $C(\overline{\Omega})$ el espacio de las funciones uniformemente continuas sobre Ω, sea $\varphi : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1, definida por $(x, \xi) \mapsto \varphi(x, \xi)$, y sea $f : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ el operador definido por $u \mapsto f(u)$, donde $f(u)(x) = \varphi(x, u(x))$ para cada $x \in \overline{\Omega}$. Prueba que f es diferenciable en $C(\overline{\Omega})$ y que para cada $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ se verifica que

$$f'(u_0)[v](x) = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x, u_0(x)) \cdot v(x) \qquad \forall v \in C(\overline{\Omega}).$$

Operadores de Nemytskii

Sobre espacios de Sobolev es usual extender un operador composición

$$x \mapsto \varphi(x, u(x))$$

donde φ puede no ser continua en x. A esta clase de operadores se le denomina *operadores de Nemytskii*.

DEFINICIÓN 1.1.3 Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Decimos que $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una *función de Caratheodory*, si

i) $\forall$c.t.p. $x \in \Omega$ se tiene que $\varphi(x, \cdot)$ es continua;

ii) $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$ se tiene que $\varphi(\cdot, \xi)$ es μ-medible.

TEOREMA 1.1.3 Sea Ω un conjunto abierto en X, sea $p_1 \geq 1$, sea $p_2 \geq 1$, sea $C > 0$ y sea $b \in L^{p_2}_{\mathrm{d}\mu}(\Omega)$. Si $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función de Caratheodory que satisface

$$|\varphi(x,\xi)| \leq b(x) + C|\xi|^{\frac{p_1}{p_2}} \qquad \forall \text{c.t.p. } x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

entonces la aplicación $f : L^{p_1}_{\mathrm{d}\mu}(\Omega, \mathbb{R}^N) \to L^{p_2}_{\mathrm{d}\mu}(\Omega)$ definida por $u \mapsto f(u)$, donde $f(u)(x) = \varphi(x, u(x))$ para cada $x \in \Omega$, es continua.

EJERCICIOS 1.1.3

1. Sea $g : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $(t,x) \mapsto g(t,x)$, una función continua tal que $\frac{\partial g}{\partial x}$ existe y $\frac{\partial g}{\partial x} \in C([a,b] \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Considera el operador de Nemytskii $G : C([a,b]) \to C([a,b])$ definido por $u \mapsto G(u)$, donde $G(u)(t) = g(t, u(t))$ para cada $t \in [a,b]$. Prueba que G es Fréchet diferenciable y calcula $G'(u)$.

2. Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^N$ y sea $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $(x,\xi) \mapsto \varphi(x,\xi)$, una función de Caratheodory tal que existe $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, siendo ésta una función de Caratheodory que verifica

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(x,\xi)\right| \leq b(x) + C|\xi|^r \qquad \forall \text{c.t.p. } x \in \Omega, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

donde $b \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$, $C > 0$ y $r = \frac{N+2}{N-2}$, no siendo necesaria esta última restricción en el caso $N \leq 2$. Entonces, el funcional $f : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$u \mapsto f(u) = \int_\Omega \varphi(x, u(x))\, \mathrm{d}x$$

es diferenciable en $H^1(\Omega)$, con derivada de Fréchet dada por

$$f'(u)[v] = \langle f'(u), v\rangle = \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(x, u(x)) \cdot v(x)\, \mathrm{d}x \qquad \forall v \in H^1(\Omega),$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno sobre $H^1(\Omega)$.

1.1.2. Derivadas de orden superior

Sea Ω un conjunto abierto en X y sea $x_0 \in \Omega$. La derivada de segundo orden de f en x_0 está definida por la derivada de f' en x_0. Como $f' : \Omega \to L(X,Y)$, entonces $f''(x_0) \in L(X, L(X,Y))$. Buscamos un espacio alternativo para definir $f''(x_0)$.

DEFINICIÓN 1.1.4 Sea Ω un conjunto abierto en X, sea $x_0 \in \Omega$ y sea $f : \Omega \to Y$ una aplicación Fréchet diferenciable en Ω. Decimos que f es *dos veces diferenciable* en x_0 si $f' : \Omega \to L(X,Y)$ es Fréchet diferenciable en x_0, y anotamos $(f')'(x_0) = f''(x_0)$. La aplicación $f''(x_0)$ se denomina *derivada de segundo orden de f en x_0*.

A continuación identificaremos a $f''(x_0)$ con una aplicación bilineal continua de la siguiente forma:

- Notar que
$$f''(x_0) \in L(X, L(X, Y)),$$
$$(\forall h \in X)(f''(x_0)[h] \in L(X, Y))$$
y
$$(\forall k \in X)(\forall h \in X)(f''(x_0)[h][k] \in Y).$$
- Se define la aplicación $\Psi : X \times X \to Y$ por
$$(h, k) \mapsto \Psi(h, k) = f''(x_0)[h][k]$$
que resulta ser bilineal continua.
- Desde ahora en adelante, y a menos que se señale otra cosa, interpretaremos a $f''(x_0)$ como la aplicación bilineal Ψ definida previamente.

Antes de presentar los principales resultados de esta subsección, enunciaremos algunos resultados de interés.

LEMA 1.1.1 Sea $L_2(X\times Y, Z)$ el espacio vectorial de las aplicaciones bilineales continuas de $X\times Y$ en Z. Este espacio es Banach para la norma
$$\|B\|_{L_2(X\times Y,Z)} = \sup_{\|h\|_X\leq 1; \|k\|_Y\leq 1} \|B(h, k)\|_Z.$$

LEMA 1.1.2 El espacio $L_2(X \times Y, Z)$ es isométricamente isomorfo al espacio $L(X, L(Y, Z))$ a través de la correspondencia $\mathcal{J} : L(X, L(Y, Z)) \to L_2(X \times Y, Z)$ definida por $\varphi \mapsto \mathcal{J}(\varphi)$, donde
$$\mathcal{J}(\varphi)(h, k) = \varphi(h)[k] \qquad \forall (h, k) \in X \times Y.$$

Un caso particular en el que podemos aplicar el Lema 1.1.2 es el siguiente: Aprovechando la correspondencia $\mathcal{J}$ que permite identificar el espacio $L(X, L(X, Y))$ con el espacio $L_2(X \times X, Y)$, podemos también identificar a $f''(x_0)$ con $\mathcal{J}(f''(x_0))$ y poner
$$f''(x_0)[h][k] = f''(x_0)(h, k) \qquad \forall (h, k) \in X \times Y.$$

OBSERVACIÓN 1.1.6 *Si A es una matriz simétrica de orden N y $X = \mathbb{R}^N$, entonces*
$$h^T Ak = (h^T Ak)^T = k^T Ah.$$
Luego, si ponemos $B(h, k) = h^T Ak$, entonces
$$B(h, k) = B(k, h).$$

EJERCICIOS 1.1.4

1. Sea Ω un conjunto abierto en X y sea $f:\Omega\to Y$ una aplicación dos veces diferenciable en Ω. Entonces, dada $h\in X$, la aplicación $\varphi:\Omega\to Y$, definida por $x\mapsto\varphi(x)=f''(x)[h]$, es diferenciable en Ω y verifica
$$\varphi'(x)[k]=f''(x)[h][k]\qquad\forall k\in X.$$

2. Sea $g:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $(t,\xi)\mapsto g(t,\xi)$, una función continua tal que $\frac{\partial g}{\partial\xi}$ y $\frac{\partial^2 g}{\partial\xi^2}$ existen y verifican $\frac{\partial g}{\partial\xi},\frac{\partial^2 g}{\partial\xi^2}\in C([0,1]\times\mathbb{R})$. Sea $G:C([0,1])\to C([0,1])$, definido por $x\mapsto G(x)$, un operador tal que
$$G(x)(t)=g(t,x(t))\qquad\forall t\in[0,1].$$
Calcula $G''(x)$.

OBSERVACIÓN 1.1.7 *El siguiente diagrama es válido*

$$\begin{array}{ccc} L(X,L(X,Y)) & \cong & L_2(X\times X,Y)\\ \downarrow & & \downarrow\\ \Psi & \longrightarrow & \hat{\Psi}\end{array}$$

donde
$$\hat{\Psi}(h,k)=\Psi[h][k]\qquad\forall(h,k)\in X\times X.$$

Luego, el elemento $f''(x_0)\in L(X,L(X,Y))$ puede ser identificado con un elemento de $L_2(X\times X,Y)$ que denotamos de la misma forma. Es decir,
$$(f''(x_0)[h])[k]=f''(x_0)[h][k]\qquad\forall(h,k)\in X\times X,$$
donde $(f''(x_0)[h])\in L(X,L(X,Y))$, mientras que $f''(x_0)\in L_2(X\times X,Y)$.

LEMA 1.1.3 Sean X_1, X_2, …,X_n espacios Banach. El espacio
$$L(X_1,L(X_2,L(X_3,L(\ldots,L(X_{n-1},L(X_n,Y))\ldots))))$$
es isométricamente isomorfo al espacio
$$L_n(X_1\times X_2\times\ldots\times X_n,Y)$$
de las aplicaciones n-lineales continuas de $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ a Y, el cual está dotado de la norma
$$\|\varphi\|_{L_n}=\sup_{\|h_i\|_{X_i}\le 1,\ 1\le i\le n}\|\varphi[h_1][h_2]\ldots[h_n]\|_Y.$$

OBSERVACIÓN 1.1.8 *El Lema 1.1.3 nos permite definir inductivamente a*

$$f^{(n)}(x_0) \in L(X, L(X, L(X, \ldots, L(X, Y) \ldots)))$$

como $(f^{(n-1)})'(x_0)$ *donde*

$$f^{(n-1)} : \Omega \to L(X, L(X, L(X, \ldots, L(X, Y) \ldots))).$$

DEFINICIÓN 1.1.5 Sea Ω un conjunto abierto en X y sea $f : \Omega \to Y$ una aplicación n-veces derivable en Ω tal que $f^{(n)} : \Omega \to L(X, L(X, L(X, \ldots, L(X, Y) \ldots)))$ es continua. Decimos en este caso que f *es de clase* C^n. Además, en el caso que f es de clase C^n para cada $n \in \mathbb{N}$, decimos que f *es de clase* C^∞.

OBSERVACIÓN 1.1.9

- *El Lema 1.1.3 nos permite identificar* $f^{(n)}(x_0)$ *con un elemento de* $L_n(X^n, Y)$ *de la siguiente forma*

$$(\ldots((f^{(n)}(x_0)[h_1])[h_2])\ldots)[h_n] = f^{(n)}(x_0)[h_1][h_2]\ldots[h_n] \qquad \forall (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in X^n.$$

- *Sea* Ω *un conjunto abierto en* $\mathbb{R}^N$. *Recordemos que si* f *es una aplicación dos veces diferenciable en* Ω, *la aplicación* $\varphi : \Omega \to Y$ *definida por* $x \mapsto \varphi(x) = f'(x)[h]$, *es diferenciable y verifica que* $\varphi'(x)[k] = f''(x)[h][k]$.

- *Recordemos además que es común usar la notación* $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$ *para referirse a* φ'. *Más aún, si* f *es de clase* C^2, *entonces* φ' *también puede escribirse como* $\mathrm{d}\varphi$.

- *A raíz de los puntos anteriores, es claro que si* $f \in C^2(\Omega, Y)$, *entonces*

$$\mathrm{d}(f'(x)[h])[k] = f''(x)[h][k].$$

LEMA 1.1.4 Sea Ω un conjunto abierto en X y sea $f \in C^n(\Omega, Y)$. Entonces

$$\mathrm{d}\big(f^{(n-1)}(x)[h_1][h_2]\ldots[h_{n-1}]\big)[h_n] = f^{(n)}(x)[h_1][h_2]\ldots[h_{n-1}][h_n].$$

TEOREMA 1.1.4 Sea Ω un conjunto abierto en X, sea $x_0 \in \Omega$ y sea $f : \Omega \to Y$ una aplicación n veces diferenciable en x_0. Entonces, para cualquier permutación σ de $(1, 2, \ldots, n)$, tenemos

$$f^{(n)}(x_0)[h_1]\ldots[h_n] = f^{(n)}(x_0)[h_{\sigma(1)}]\ldots[h_{\sigma(n)}].$$

NOTACIÓN 1.1.1 Por simplicidad, introducimos la siguiente notación

$$f^{(k)}(x_0)\underbrace{[h_1]\ldots[h_1]}_{i \text{ veces}}\underbrace{[h_2]\ldots[h_2]}_{j \text{ veces}} = f^{(k)}(x_0)[h_1]^i[h_2]^j.$$

TEOREMA 1.1.5 (Teorema de la fórmula de Taylor) Sea Ω un conjunto abierto en X, sea $x_0 \in \Omega$ y sea $f : \Omega \to Y$ una aplicación n veces diferenciable en x_0, con $f^{(j)}$ continua para $1 \leq j \leq n$. Entonces

$$\left\| f(x_0+h) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)[h]^k \right\| = o(\|h\|^n) \quad \text{cuando } h \to 0.$$

EJEMPLO 1.1.8 Sea $f \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Encuentra $f''(x)$.

Derivadas parciales en espacios Banach

Sea Ω un conjunto abierto en $X \times Y$, sea $(x_0, y_0) \in \Omega$ y sea $f : \Omega \to Z$ una aplicación diferenciable en Ω. Nuestra intención aquí es definir apropiadamente el significado de las derivadas parciales $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$. Antes, conviene introducir las siguientes aplicaciones lineales continuas:

$$\begin{array}{rccl} \tau_{y_0}: & X & \to & X \times Y \\ & x & \to & \tau_{y_0}(x) = (x, y_0) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} \tau_{x_0}: & Y & \to & X \times Y \\ & y & \to & \tau_{x_0}(y) = (x_0, y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \sigma_{y}: & X & \to & X \times Y \\ & x & \to & \sigma_{y}(x) = (x, 0) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} \sigma_{x}: & Y & \to & X \times Y \\ & y & \to & \sigma_{x}(y) = (0, y) \end{array}$$

DEFINICIÓN 1.1.6 Sea Ω un conjunto abierto en $X \times Y$, sea $(x_0, y_0) \in \Omega$ y sea $f : \Omega \to Z$ una aplicación tal que $f \circ \tau_{y_0} : X \to Z$ es diferenciable en x_0.

- Llamamos *derivada parcial de f respecto a x* en (x_0, y_0) a

$$f_x(x_0, y_0) = (f \circ \tau_{y_0})'(x_0) = f'(\tau_{y_0}(x_0))\tau'_{y_0}(x_0).$$

- Llamamos *derivada parcial de f respecto a y* en (x_0, y_0) a

$$f_y(x_0, y_0) = (f \circ \tau_{x_0})'(y_0) = f'(\tau_{x_0}(y_0))\tau'_{x_0}(y_0).$$

OBSERVACIÓN 1.1.10 *Notemos que $f_x(x_0, y_0) \in L(X, Z)$ y $f_y(x_0, y_0) \in L(Y, Z)$.*

OBSERVACIÓN 1.1.11

- *Notar que $\tau_{y_0}(x) = (x, 0_Y) + (0_X, y_0) = \sigma_y(x, 0_Y) + (0_X, y_0)$, de manera que*

$$\tau'_{y_0}(x)[h] = \sigma'_y(x)[h] = \sigma_y(h) = (h, 0_Y).$$

- *Luego, si f es diferenciable en (x_0, y_0), entonces*

$$f_x(x_0, y_0)[h] = f'(\tau_{y_0}(x_0))\tau'_{y_0}(x_0)[h] = f'(x_0, y_0)(h, 0_Y).$$

- *Análogamente,*

$$f_y(x_0, y_0)[h] = f'(\tau_{x_0}(x_0))\tau'_{x_0}(y_0)[h] = f'(x_0, y_0)(0, k).$$

- *Desde el hecho que $f'(x_0, y_0) \in L(X \times Y, Z)$, se concluye que*

$$f'(x_0, y_0)(h, k) = f'(x_0, y_0)(h, 0) + f'(x_0, y_0)(0, k) = f_x(x_0, y_0)[h] + f_y(x_0, y_0)[k].$$

DEFINICIÓN 1.1.7 Sea Ω un conjunto abierto en $X \times Y$, sea $(x_0, y_0) \in \Omega$ y sea $f : \Omega \to Z$ una aplicación tal que $f \circ \tau_{y_0} : X \to Z$ diferenciable en x_0.

- Si $f_x(x, y)$ existe y es diferenciable en (x_0, y_0), llamamos *derivadas parciales sucesivas de* $f_x(x, y)$ a

$$f_{xx}(x_0, y_0) = (f_x)_x(x_0, y_0) \quad \wedge \quad f_{xy}(x_0, y_0) = (f_x)_y(x_0, y_0).$$

- Si $f_y(x, y)$ existe y es diferenciable en (x_0, y_0), llamamos *derivadas parciales sucesivas de* $f_y(x, y)$ a

$$f_{yx}(x_0, y_0) = (f_y)_x(x_0, y_0) \quad \wedge \quad f_{yy}(x_0, y_0) = (f_y)_y(x_0, y_0).$$

OBSERVACIÓN 1.1.12 *Notar que*

- $f_{xx}(x_0, y_0) \in L(X, L(X, Z))$
- $f_{xy}(x_0, y_0) \in L(Y, L(X, Z))$
- $f_{yx}(x_0, y_0) \in L(X, L(Y, Z))$
- $f_{yy}(x_0, y_0) \in L(Y, L(Y, Z))$

EJEMPLO 1.1.9 Sea Ω un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^N$, sea $g \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ y sea $f : C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ el funcional definido por

$$\mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega g(x, \mathbf{u}(x))\mathrm{d}x,$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$,

$$\nabla \mathbf{u}(x) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_{N\times N} \quad \text{y} \quad |\nabla \mathbf{u}(x)| = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Calcula $f'(\mathbf{u})$ y $f''(\mathbf{u})$. ¿Es posible afirmar que f es dos veces diferenciable en $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ bajo la condición adicional

$$g_{\mathbf{uu}}(x, \mathbf{u}) \leq c(1 + |\mathbf{u}|^{\frac{4}{N-2}}) \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N,$$

para alguna constante $c > 0$?. Justifica tu respuesta.

EJERCICIOS 1.1.5 Sea Ω un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^N$.

1. Sea $f : W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $p > 2$, el funcional definido por
$$u \mapsto f(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \mathrm{d}x.$$
Calcula $f'(u)$ y $f''(u)$.

2. Sea $f : C_0^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ el funcional definido por
$$\mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{u}) = \int_\Omega \det\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_{N\times N} \mathrm{d}x.$$
Calcula $f'(\mathbf{u})$ y $f''(\mathbf{u})$.

3. Sea Ω un conjunto abierto en $X \times Y$, sea $f : \Omega \to Z$ una aplicación n veces diferenciable en Ω, con $f \in C^n(\Omega, Z)$, y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq m \leq n$. Encuentra el m-ésimo término en la expansión de Taylor de f para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$.

1.2. Teorema de la función implícita local

1.2.1. Teorema de la función inversa local

DEFINICIÓN 1.2.1 Sea Ω un conjunto abierto en X, sea $x_0 \in \Omega$ y sea $f : \Omega \to Y$ una aplicación. Decimos que f es localmente invertible en torno a x_0 si

$$\exists \mathcal{U} \text{ conjunto abierto en } X \text{ tal que } x_0 \in \mathcal{U}$$

y se verifica que
$$f(\mathcal{U}) \text{ es abierto y } f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U}) \text{ es un homeomorfismo.}$$

A continuación enunciamos una serie de resultados previos que serán útiles para probar el Teorema de la función inversa.

TEOREMA 1.2.1 (Teorema del punto fijo de Banach) Sea (X, d) un espacio métrico completo, sea $k \in]0,1[$ y sea $\varphi : X \to X$ una k–contracción (*i.e.* $\exists k \in]0,1[$ tal que $d(\varphi(x),\varphi(y)) < k\, d(x,y)$). Entonces,
$$\exists! \bar{x} \in X \text{ tal que } \varphi(\bar{x}) = \bar{x}.$$

LEMA 1.2.1 Sea $\mathcal{I}(X,Y) = \{T \in L(X,Y) : \exists T^{-1} \in L(Y,X)\}$. Entonces, $\mathcal{I}(X,Y)$ es un conjunto abierto en $L(X,Y)$, y $\Theta : \mathcal{I}(X,Y) \to L(Y,X)$ definida por $T \mapsto \Theta(T) = T^{-1}$ es continua. Más aún, se verifica que Θ es de clase C^∞, y en particular, que $\Theta' = \mathrm{d}\Theta$.

LEMA 1.2.2 Sea $B(0_X, R)$ la bola abierta de centro en 0_X y radio R en X, sea $k \in]0,1[$ y sea $\psi : B(0_X, r) \to X$ una k–contracción tal que $\psi(0_X) = 0_X$. Entonces, la aplicación $\Phi : B(0_X, r) \to X$, definida por $x \mapsto \Phi(x) = x - \psi(x)$ es una aplicación inyectiva en $\overline{B(0_X, r)}$ y verifica

$$\overline{B(0_X, r)} \subset \Phi(\overline{B(0_X, r)}).$$

Además, se verifica que $\Phi^{-1} : \Phi(\overline{B(0_X, r)}) \to \overline{B(0_X, r)}$ es $\frac{1}{1-k}$–Lipschitziana y que $\Phi(B(0_X, r))$ es un conjunto abierto en X.

TEOREMA 1.2.2 (Teorema de la función inversa local) Sea Ω un conjunto abierto en X, sea $x_0 \in \Omega$ y sea $f : \Omega \to Y$ una aplicación de clase C^1. Asuma que existe $(f'(x_0))^{-1} \in L(Y, X)$. Entonces,

$$\exists \mathcal{U} \text{ un conjunto abierto en } X \text{ tal que } x_0 \in \mathcal{U}$$

y se verifica que

$$f(\mathcal{U}) \text{ es un conjunto abierto en } Y \text{ tal que } f(x_0) \in f(\mathcal{U})$$

con $f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ biyectiva y $f^{-1} : f(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$ de clase C^1.

OBSERVACIÓN 1.2.1 *El Teorema 1.2.2 de la función inversa local tiene como requisito esencial que la inversa de $f'(x_0)$ sea continua. Es decir, $f'(x_0) \in \mathcal{I}(X, Y)$. Por lo tanto, podemos usar el Lema 1.2.1 en su demostración.*

1.2.2. Teorema de la función implícita local

TEOREMA 1.2.3 (Teorema de la función implícita local, primera versión) Sea Ω un conjunto abierto en X, sea Λ un conjunto abierto en Y y sea $f : \Omega \times \Lambda \to Z$ una aplicación tal que $f(x_0, y_0) = 0_Z$. Si $f_y(x_0, y_0) \in \mathcal{I}(Y, Z)$ y $f \in C^1(\Omega \times \Lambda, Z)$, entonces

$$\exists \mathcal{U} \text{ un conjunto abierto en } X \text{ tal que } x_0 \in \mathcal{U},$$

y se verifica que

$$(\exists \phi \in C^1(\mathcal{U}, Y)) \text{ tal que } (\phi(x_0) = y_0 \ \wedge \ f(x, \phi(x)) = 0_Z \quad \forall x \in \mathcal{U}).$$

OBSERVACIÓN 1.2.2 *La aplicación ϕ en el Teorema 1.2.3 de la función implícita local verifica*

$$\phi'(x)[h] = -(f_y(x_0, \phi(x_0)))^{-1} f_x(x, \phi(x))[h] \qquad \forall h \in X, \quad \forall x \in \mathcal{U},$$

gracias al hecho que $f(x, \phi(x)) = 0_Z$.

Una versión más general del Teorema de la función implícita local es la siguiente.

TEOREMA 1.2.4 (Teorema de la función implícita local, segunda versión) Sea Ω un conjunto abierto en X, sea Λ un conjunto abierto en Y y sea $f:\Omega\times\Lambda\to Z$ una aplicación continua que verifica que $f_y\in L(\Omega\times\Lambda, L(Y,Z))$. Si para $(x_0,y_0)\in\Omega\times\Lambda$ se verifica que $f(x_0,y_0)=0_Z$ y $f_y(x_0,y_0)\in\mathcal{I}(Y,Z)$, entonces

$$\exists\,\mathcal{U} \text{ un conjunto abierto en } X \text{ tal que } x_0\in\mathcal{U},$$

$$\exists\,\mathcal{V} \text{ un conjunto abierto en } Y \text{ tal que } y_0\in\mathcal{V},$$

y se verifica que

$$(\exists\phi\in C^1(\mathcal{U},\mathcal{V})) \text{ tal que } (\phi(x_0)=y_0 \ \wedge\ f(x,\phi(x))=0_Z \quad \forall x\in\mathcal{U}).$$

1.3. Teorema de la función implícita global

1.3.1. El método de continuidad

El método de continuidad es un principio general que se puede usar para probar la existencia de soluciones de una gran variedad de ecuaciones diferenciales. A continuación mostramos un esquema de como opera este método.

Sea $f\in C^1(X,Y)$. Deseamos encontrar la solución de la ecuación

$$f(x)=0_Y.$$

Introduzcamos el parámetro $t\in[0,1]$, y una aplicación

$$F:[0,1]\times X\to Y$$

tal que F y F_x son continuas. Asumamos además que

$$F(1,x)=f(x),$$

y que

$$\exists x_0\in X \text{ tal que } F(0,x_0)=0_Y.$$

Nuestra intención es extender la solución x_0 de la ecuación

$$F(0,x)=0_Y$$

a una solución de la ecuación

$$F(1,x)=0_Y.$$

Con esta finalidad, definimos el conjunto

$$\mathcal{S}=\{t\in[0,1]:F(t,x)=0_Y \text{ posee solución}\}.$$

Notemos que S es no vacío pues $0 \in \mathcal{S}$, y si además probamos que es abierto y cerrado en $[0,1]$, entonces $\mathcal{S}$ será conexo, de donde se obtendremos que $\mathcal{S} = [0,1]$. Esto nos permitirá concluir que la ecuación

$$F(1,x) = 0_Y$$

se puede resolver.

Por lo tanto, la clave del método es probar que

1. $\mathcal{S}$ es un conjunto abierto relativo en $[0,1]$.

2. $\mathcal{S}$ es un conjunto cerrado.

A continuación presentamos las ideas principales que se usan para probar los puntos anteriores.

- Para probar 1., bastará con demostrar que

  $$(\forall t_0 \in \mathcal{S})(\exists x_{t_0} \in X) \text{ tal que } F(t_0, x_{t_0}) = 0_Y \text{ y } F_x^{-1}(t_0, x_{t_0}) \in L(Y,X),$$

  lo cual se logrará mediante el uso del Teorema 1.2.4 de la función implícita local.

  En efecto, por nuestros supuestos, tenemos que

  $$F \in C([0,1] \times X, Y) \quad \text{y} \quad F_x \in L([0,1] \times X, L(X,Y)),$$

  y si hemos probado que

  $$(\forall t_0 \in \mathcal{S})(\exists x_{t_0} \in X) \text{ tal que } F(t_0, x_{t_0}) = 0_Y \text{ y } F_x^{-1}(t_0, x_{t_0}) \in L(Y,X),$$

  entonces tenemos que se verifican todas las hipótesis del Teorema 1.2.4 de la función implícita local, de manera que obtenemos que

  $$\exists\, \mathcal{U} \text{ un conjunto abierto relativo en } [0,1] \text{ tal que } t_0 \in \mathcal{U},$$

  $$\exists\, \mathcal{V} \text{ un conjunto abierto en } X \text{ tal que } x_{t_0} \in \mathcal{V},$$

  y se verifica que

  $$(\exists\, \phi \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})) \text{ tal que } (\phi(t_0) = x_{t_0} \ \wedge \ F(t, \phi(t)) = 0_Y \quad \forall\, t \in \mathcal{U}).$$

  En resumen, hemos probado que dado $t_0 \in \mathcal{S}$, se tiene que

  $$\exists\, \mathcal{U} \text{ un conjunto abierto relativo en } [0,1] \text{ tal que } t_0 \in \mathcal{U} \text{ y } F(t, \phi(t)) = 0_Y,$$

  o equivalentemente, hemos probado que dado $t_0 \in \mathcal{S}$, se tiene que

  $$\exists\, \mathcal{U} \text{ un conjunto abierto relativo en } [0,1] \text{ tal que } t_0 \in \mathcal{U} \text{ y } \mathcal{U} \subset \mathcal{S}.$$

  Por lo tanto, $\mathcal{S}$ es abierto relativo en $[0,1]$.

- Para probar 2., bastará con seguir uno de los siguientes razonamientos, después de haber probado 1.

  (1º) Si existe un espacio Banach X_1 que esté compactamente inyectado en X, y si existe una constante $C > 0$ tal que

  $$\|x_t\|_{X_1} \leq C \qquad \forall t \in \mathcal{S},$$

  donde x_t es una solución de la ecuación

  $$F(t, x) = 0_Y,$$

  entonces $\mathcal{S}$ será cerrado.

  En efecto, si $\{t_n\} \subset \mathcal{S}$, entonces existe una subsucesión $\{t_{n_k}\}$ tal que $t_{n_k} \to t_*$ cuando $k \to \infty$, para algún $t^* \in [0, 1]$, y para cada t_{n_k} se verifica que

  $$F(t_{n_k}, x_{t_{n_k}}) = 0_Y \quad \text{y} \quad \|x_{t_{n_k}}\|_{X_1} \leq C,$$

  pues $t_{n_k} \in \mathcal{S}$. Como la inclusión $X_1 \hookrightarrow X$ es compacta y X es Banach, $\{x_{t_{n_k}}\}$ posee una subsucesión $\{x_{t_{n_{k_\ell}}}\}$ que converge a algún punto $x_* \in X$. Por continuidad de F, se sigue que

  $$F(t_{n_{k_\ell}}, x_{t_{n_{k_\ell}}}) \to F(t_*, x_*) = 0_Y \qquad \text{cuando } \ell \to \infty.$$

  Esto prueba que $t_* \in \mathcal{S}$, que equivale a decir que $\mathcal{S}$ es cerrado.

  (2º) Si X es un espacio Banach de funciones que admiten una primera derivada, entonces para cada $t \in \mathcal{S}$ existe una única solución local x_t de la ecuación $F(t, x) = 0_Y$, y si existe $C > 0$ tal que

  $$\|\dot{x}_t\|_X \leq C,$$

  donde $\dot{x}_t$ es la derivada de x_t, entonces $\mathcal{S}$ es un conjunto cerrado.

  En efecto, si $\{t_n\}$ es una sucesión incluida en un intervalo abierto contenido en $\mathcal{S}$, entonces existe una subsucesión $\{t_{n_k}\}$ tal que $t_{n_k} \uparrow t_*$ cuando $k \to \infty$ o bien $t_{n_k} \downarrow t_*$ cuando $k \to \infty$. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $t_{n_k} \uparrow t_*$ cuando $k \to \infty$, entonces considerando $n_k \geq m_k$, obtenemos

  $$\|x_{t_{n_k}} - x_{t_{m_k}}\|_X \leq \int_{t_{m_k}}^{t_{n_k}} \|\dot{x}_t\|_X \, \mathrm{d}t \leq C(t_{n_k} - t_{m_k}) \to 0 \quad \text{cuando } n_k, m_k \to \infty.$$

  Es decir, $\{x_{t_{n_k}}\}$ resulta ser una sucesión de Cauchy en X, que es un espacio Banach. Sea x_* el límite de la sucesión $\{x_{t_{n_k}}\}$. Luego, dado que $(t_{n_k}, x_{t_{n_k}}) \to (t_*, x_*)$ cuando $k \to \infty$, que $F(t_{n_k}, x_{n_k}) = 0_Y$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y que F es continua, obtenemos

  $$F(t_*, x_*) = 0_Y,$$

  que equivale a decir que $t_* \in \mathcal{S}$, y por lo tanto $\mathcal{S}$ es cerrado.

1.3.2. Teorema de la función implícita global

Como una aplicación del método de continuidad, es posible probar un teorema de la función implícita en un contexto global. Un ingrediente importante para obtener un resultado como este es el siguiente resultado.

LEMA 1.3.1 (Desigualdad de Gronwall-Bellman) Sea $\rho \in C([a,b])$, sea $\mu \in C([a,b])$, con $\mu \geq 0$ en $[a,b]$. Si $z : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisface

$$z(t) \leq \rho(t) + \int_c^t \mu(s)z(s)\,\mathrm{d}s \qquad \forall t \in [a,b],$$

entonces

$$z(t) \leq \rho(t) + \int_c^t \rho(s)\mu(s)e^{\int_s^t \mu(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s \qquad \forall t \in [a,b].$$

En particular, si $\rho(t) \equiv \rho$ es una constante, entonces

$$z(t) \leq \rho e^{\int_s^t \mu(\tau)\mathrm{d}\tau} \qquad \forall t \in [a,b].$$

Si, además $\mu(t) \equiv \mu$ también es una constante, entonces

$$z(t) \leq \rho e^{\mu(t-a)} \qquad \forall t \in [a,b].$$

TEOREMA 1.3.1 (Teorema de la función implícita global) Sea $f \in C^1(X,Y)$ tal que

$$(f'(x))^{-1} \in L(Y,X) \qquad \forall x \in X.$$

Si existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$\|(f'(x))^{-1}\| \leq C_1\|x\| + C_2 \qquad \forall x \in X,$$

entonces f es un difeomorfismo.

1.4. Algunas aplicaciones a ecuaciones diferenciales

1.4.1. Existencia y unicidad de soluciones 2π-periódicas para una EDO

Queremos encontrar soluciones 2π-periódicas de la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{u} + \lambda u + u^2 = f(t)$$

donde $\lambda > 0$ y f es una función continua y 2π-periódica. Para ello, consideremos los espacios

$$X = C^2(2\pi) = \{u \in C^2(\mathbb{R}) : u \text{ es } 2\pi\text{-periódica}\}$$

y

$$Y = C(2\pi) = \{u \in C(\mathbb{R}) : u \text{ es } 2\pi\text{-periódica}\}$$

con las normas

$$\|u\|_X = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty + \|u''\|_\infty \quad \wedge \quad \|v\|_Y = \|u\|_\infty.$$

Con ayuda de la aplicación $S : X \to Y$ definida por $u \mapsto S(u) = \ddot{u} + \lambda u + u^2$ y el Teorema 1.2.2 de la función inversa, probemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.4.1 Sea $\lambda > 0$, con $\lambda \neq k^2$, $k \in \mathbb{N}$, y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que es 2π-periódica. Si $\|f\|_\infty$ es suficientemente pequeña, entonces la ecuación

$$\ddot{u} + \lambda u + u^2 = f(t)$$

posee una única solución 2π-periódica.

1.4.2. Transformada de Legendre

Consideramos la ecuación de superficie mínima

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2)}}\right) = 0,$$

para $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Notemos que la ecuación puede reescribirse como

$$(1 + u_{x_2}^2)u_{x_1x_1} - 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2} + (1 + u_{x_1}^2)u_{x_2x_2} = 0. \tag{1.1}$$

Aquí estamos interesados en transformar la ecuación no lineal (1.1) en una ecuación lineal mediante una apropiada sustitución.

Asumamos que al menos en un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ es posible invertir las relaciones

$$p_1 = u_{x_1}(x_1, x_2), \quad p_2 = u_{x_2}(x_1, x_2),$$

que se resuelven para

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_1(p_1, p_2), \quad \bar{x}_2 = \bar{x}_2(p_1, p_2).$$

Si $J = \det(\text{Hess}(u))$ ¿Qué condición sobre J nos garantiza que podemos realmente invertir p_1 y p_2? Para lograr nuestro objetivo, consideremos la función $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$v(\mathbf{p}) = \mathbf{x}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} - u(\mathbf{x}(\mathbf{p})), \tag{1.2}$$

donde $\mathbf{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$. Obtenemos, el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.4.2 Si existe $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $J(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq 0$, entonces la ecuación (1.1), que es no lineal para u, es equivalente a la ecuación lineal

$$(1 + p_2^2)v_{p_2p_2} + 2p_1p_2v_{p_1p_2} + (1 + p_1^2)v_{p_1p_1} = 0,$$

donde v es la función definida en (1.2).

1.4.3. Cambio de coordenadas

Queremos probar los siguientes resultados

LEMA 1.4.1 Sea $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Si

$$\nabla\phi(0) \neq 0,$$

entonces existe una aplicación suave

$$\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$$

tal que

$$\Phi(0) = 0, \quad \nabla\Phi(0) = I \quad \text{y} \quad \phi(\Phi(x)) = \phi(0) + \nabla\phi(0) \cdot x \quad \forall |x| \text{ pequeña.}$$

LEMA 1.4.2 (Lema de Morse) Sea $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Si

$$\nabla\phi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \det(\mathrm{Hess}(\phi(0))) \neq 0,$$

entonces existe una aplicación suave $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ tal que

$$\Phi(0) = 0, \quad \nabla\Phi(0) = I \quad \text{y} \quad \phi(\Phi(x)) = \phi(0) + \frac{1}{2}x \cdot \mathrm{Hess}(\phi(0))[x] \quad \forall |x| \text{ pequeña.}$$

OBSERVACIÓN 1.4.1 *Los lemas previos muestran que podemos cambiar de variables cerca de cero si tomamos ϕ afín en el Lemma 1.4.1 o si tomamos ϕ cuadrática en el caso del Lema 1.4.2.*

1.4.4. Problemas de valores propios no lineales

Estamos interesados en estudiar una aplicación del cálculo diferencial en ciertos problemas de minimización con restricción, y discutir el rol que juegan los multiplicadores de Lagrange en la correspondiente EDP de Euler-Lagrange.

Sea Ω un conjunto abierto, conexo y acotado en $\mathbb{R}^N$, $N > 1$, con $\partial\Omega$ de clase C^2, y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que para alguna constante $C > 0$ se verifica que

$$|g(t)| \leq C(|t| + 1) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sea $G(t) = \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s$ y asumamos que

$$|G(t)| \leq C(|t|^2 + 1) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nos interesa encontrar una solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

donde λ es conocido como el *multiplicador de Lagrange* asociado a la restricción integral

$$\int_\Omega G(u)\,\mathrm{d}x = 0.$$

El Problema (1.3) es conocido como un problema de valores propios no lineal.

Vamos a abordar este problema de la siguiente forma. Pongamos

$$\mathcal{W} = \left\{ w \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega G(w)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

y consideremos el problema de minimizar el funcional de energía $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$w \mapsto I(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\,\mathrm{d}x.$$

restringido al conjunto $\mathcal{W}$. El resultado a continuación garantiza la existencia de un elemento en $\mathcal{W}$ que minimiza al funcional I.

TEOREMA 1.4.1 (Existencia de un mínimo en la restricción) Asumamos que $\mathcal{W} \neq \varnothing$. Entonces existe $u \in \mathcal{W}$ tal que

$$I(u) = \min_{w\in\mathcal{W}} I(w).$$

Ahora, sea $u \in \mathcal{W}$ una función que minimiza al funcional I restringido a $\mathcal{W}$. Queremos saber si es posible encontrar un valor λ asociado a u, tal que

$$I'(u)[\varphi] = \lambda \int_\Omega g(u)\varphi\,\mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Notemos que el funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$w \mapsto J(w) = \int_\Omega G(w)\,\mathrm{d}x,$$

verifica que

$$J'(w)[\varphi] = \int_\Omega g(w)\varphi\,\mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Por lo tanto, queremos saber si podemos encontrar un valor λ asociado a u, tal que

$$(I' - \lambda J')(u)[\varphi] = 0 \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

o equivalentemente a

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi\,\mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega g(u)\varphi\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{1.4}$$

que es la formulación débil del problema (1.3). Así que, si tal valor λ existe, entonces u será una solución débil del problema (1.3), o equivalentemente, u será un punto crítico del funcional

$$I - \lambda J,$$

bajo la restricción $J \equiv 0$ en $\mathcal{W}$.

De esta forma, es de sumo interés estudiar la existencia de los multiplicadores de Lagrange.

TEOREMA 1.4.2 (Multiplicadores de Lagrange) Sea $u \in \mathcal{W}$ tal que

$$I(u) = \min_{w \in \mathcal{W}} I(w).$$

Entonces, existe un número real λ tal que (1.4) se cumple.

1.4.5. Existencia y unicidad para un problema en EDP's

A continuación probaremos un importante resultado de existencia y unicidad de soluciones de un problema en EDP's. Para los siguientes tres resultados, trabajamos con el siguiente grupo de hipótesis:

H_Ω) Ω es un conjunto abierto, conexo y acotado en $\mathbb{R}^N$, $N > 1$, con $\partial\Omega$ de clase C^2.

H_ϕ) $\phi \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$ para algún $\gamma \in]0,1[$.

H_{f0}) $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$.

H_{f1}) Existe una función creciente $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que

$$f(x,\eta,\xi) \leq c(|\eta|)(1+|\xi|^2) \qquad \forall (x,\eta,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

H_{f2}) $\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,\eta,\xi) \leq 0 \quad \forall (x,\eta,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

H_{f3}) Existe una constante $M > 0$ tal que para cada $(x,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$ se tiene que

$$\begin{cases} f(x,\eta,\xi) < 0 & \text{si } \eta > M \\ f(x,\eta,\xi) > 0 & \text{si } \eta < -M. \end{cases}$$

Nuestra motivación es probar que la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x,u(x),\nabla u(x)) & x \in \Omega \\ u(x) = \phi(x) & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

posee solución única en $C^{1,\gamma}$.

LEMA 1.4.3 Asumamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ satisface H_Ω), que $\phi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ satisface H_ϕ) y que $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisface H_{f0}) y H_{f3}). Si $u \in C^2(\Omega)$ es una solución de (1.5), entonces

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \max\left\{ \max_{\partial\Omega} \{|\phi(x)|, M\} \right\}.$$

LEMA 1.4.4 Asumamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ satisface H$_\Omega$) y que $\phi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ satisface H$_\phi$). Entonces la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + u(x) = a(x)(1 + |\nabla u(x)|^2) & x \in \Omega \\ u(x) = \phi(x) & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

tiene una única solución $u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ y

$$\|u\|_{C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C,$$

donde C es una constante que depende de $\|a\|_{C(\Omega)}$, $\|\phi\|_{C^{2,\gamma}(\Omega)}$ y γ.

TEOREMA 1.4.3 Asumamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ satisface H$_\Omega$), que $\phi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ satisface H$_\phi$) y que $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisface H$_{f0}$), H$_{f1}$), H$_{f2}$) y H$_{f3}$). Entonces, la ecuación (1.5) posee una única solución en $C^{2,\gamma}(\Omega)$.

Capítulo 2

Métodos de punto fijo

En este capítulo estudiaremos los teoremas de punto fijo más conocidos junto a algunas de sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales.

Recordemos que en estos apuntes estamos considerando los espacios normados $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ y $(Z, \|\cdot\|_Z)$ como espacios Banach, a menos que se señale otra cosa.

2.1. Los teoremas de punto fijo

2.1.1. Teorema del punto fijo de Banach

A continuación vamos a reconsiderar el Teorema del punto fijo de Banach, en una versión para espacios Banach también conocida como el Principio de contracción de Banach.

Teorema 2.1.1 (Principio de contracción de Banach) Sea $\alpha \in]0,1[$ y sea $T : X \to X$ una α-contracción. Entonces T posee un único punto fijo $\bar{x} \in X$, *i.e.*

$$\exists!\, \bar{x} \in X \quad \text{tal que} \quad T(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Además, dado $x_0 \in X$ cualquiera, si consideramos la sucesión recurrente $\{x_n\}$ definida por

$$x_n = T(x_{n-1}) \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}.$$

Más aún,

$$\|x_n - \bar{x}\|_X \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\|_X \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.1.2. Teorema del punto fijo de Brouwer

El teorema a continuación establece un resultado de existencia solamente. La demostración es no trivial, por lo tanto aquí la omitiremos, pero volveremos a ella en el capítulo siguiente.

TEOREMA 2.1.2 (Teorema del punto fijo de Brouwer) Sea $B(0,R)$ la bola abierta de centro en el origen y radio R contenida en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, y sea $T : \overline{B(0,R)} \to \overline{B(0,R)}$ un operador continuo. Entonces T posee al menos un punto fijo $\bar{x} \in \overline{B(0,R)}$, *i.e.*

$$\exists\, \bar{x} \in \overline{B(0,R)} \quad \text{tal que} \quad T(\bar{x}) = \bar{x}.$$

2.1.3. Teorema del punto fijo de Schauder

El teorema que vamos a estudiar en esta sección es una extensión del Teorema 2.1.2 del punto fijo de Brouwer a espacios Banach. Las principales claves en el resultado a continuación son la compacidad, y en menor medida, la convexidad del conjunto sobre el cual trabajamos.

TEOREMA 2.1.3 (Teorema del punto fijo de Schauder) Sea K un conjunto compacto, convexo y no vacío contenido en X, y sea $T : K \to K$ un operador continuo. Entonces T posee al menos un punto fijo $\bar{x} \in K$, *i.e.*

$$\exists\, \bar{x} \in K \quad \text{tal que} \quad T(\bar{x}) = \bar{x}.$$

2.1.4. Teorema del punto fijo de Schaefer

El teorema a continuación es una forma alternativa de mirar el Teorema 2.1.3 del punto fijo de Schauder, y es frecuentemente implementado en el contexto de las EDP's.

DEFINICIÓN 2.1.1 Un operador nolineal $A : X \to X$ es llamado compacto si para cada sucesión $\{u_k\}$ en X, la sucesión $\{A(u_k)\}$ en X es precompacta, *i.e.*

$$\exists \text{ una subsucesión } \{u_{k_j}\} \text{ tal que } \{A(u_{k_j})\} \text{ converge en } X.$$

TEOREMA 2.1.4 (Teorema del punto fijo de Schaefer) Sea $A : X \to X$ un operador continuo y compacto. Si el conjunto

$$\{u \in X : u = \lambda A[u] \text{ para algún valor de } \lambda : \lambda \in [0,1]\}$$

es acotado, entonces A posee al menos un punto fijo $\bar{x} \in X$, *i.e.*

$$\exists\, \bar{x} \in X \quad \text{tal que} \quad A(\bar{x}) = \bar{x}.$$

La afirmación en el Teorema 2.1.4 es que si tenemos una cota para cualquier punto fijo posible de cualquiera de los operadores λA, para $\lambda \in [0,1]$, entonces tendremos la existencia de un punto fijo para A. Esto está en concordancia con el notable siguiente principio informal: *si uno puede probar que ciertas estimaciones para las soluciones de una EDP no lineal se cumplen, bajo el supuesto que tales soluciones existen, entonces uno obtiene que realmente tales soluciones existen*. Este procedimiento es conocido como el *método de las estimaciones a priori*.

2.2. Aplicaciones a ecuaciones diferenciales

2.2.1. Existencia de una solución para una ecuación de segundo orden autoadjunta

Queremos estudiar la ecuación forzada de segundo orden autoadjunta

$$(p(t)x')' + q(t)x = h(t), \tag{2.1}$$

donde p y q son funciones continuas sobre $[a, \infty[$ y $p > 0$ en $[a, \infty[$.

TEOREMA 2.2.1 Sean $p, q, h \in C([a, \infty[)$ tales que $p > 0$ en $[a, \infty[$, $q \geq 0$ en $[a, \infty[$, $\int_a^\infty \frac{1}{p(s)}\,\mathrm{d}s < \infty$ y $\int_a^\infty h(s)\,\mathrm{d}s < \infty$. Adicionalmente, consideremos la función $P : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$t \mapsto P(t) = \int_1^\infty \frac{1}{p(s)}\,\mathrm{d}s$$

y asumamos que $\int_a^\infty q(s)P(s)\,\mathrm{d}s < \infty$. Entonces, la ecuación (2.1) tiene una solución que converge a cero cuando $t \to \infty$.

2.2.2. Existencia de una solución para un problema de valores de frontera

Preliminares sobre problemas autoadjuntos y funciones de Green

Consideremos la ecuación diferencial lineal autoadjunta de segundo orden,

$$(p(t)x')' + q(t)x = h(t), \tag{2.2}$$

donde p, q, $h \in C(I)$ y $p > 0$ en I. Sea

$$\mathcal{D} = \{x \in C^1(I) : px' \in C^1(I)\}$$

y definamos el operador lineal de segundo orden $L : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ definido por $x \mapsto Lx$ donde

$$Lx(t) = (p(t)x'(t))' + q(t)x(t) \qquad \forall t \in I.$$

Consideremos ahora el PVF homogéneo

$$\begin{cases} Lx = 0 \quad \text{en }]a, b[\\ \bar{\alpha}x(a) - \bar{\beta}x'(a) = 0 \\ \bar{\gamma}x(b) + \bar{\delta}x'(b) = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

donde $\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 > 0$ y $\bar{\gamma}^2 + \bar{\delta}^2 > 0$.

TEOREMA 2.2.2 Asumamos que el problema (2.3) posee una única solución que es la trivial. Entonces, el PVF

$$\begin{cases} Lx = h(t) \quad \text{en }]a,b[\\ \bar{\alpha}x(a) - \bar{\beta}x'(a) = A \\ \bar{\gamma}x(b) + \bar{\delta}x'(b) = B, \end{cases} \tag{2.4}$$

donde $A, B \in \mathbb{R}$ son constantes y $h \in C([a,b])$, posee una única solución.

TEOREMA 2.2.3 (Función de Green para un PVF general) Asumamos que el problema (2.4) posee una única solución que es la trivial, y para cada $s \in [a,b]$, consideremos $u(\cdot,s)$ como la solución del PVF

$$\begin{cases} Lu(\cdot,s) = 0 \quad \text{en }]a,b[\\ \bar{\alpha}u(a,s) - \bar{\beta}u'(a,s) = 0 \\ \bar{\gamma}u(b,s) + \bar{\delta}u'(b,s) = -\bar{\gamma}x(b,s) - \bar{\delta}x'(b,s), \end{cases} \tag{2.5}$$

donde x es la solución del PVI

$$\begin{cases} Lx(\cdot,s) = 0 \quad \text{en }]a,b[\\ x(s,s) = 0 \\ x'(s,s) = \frac{1}{p(s)}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Consideremos ahora la función

$$\begin{aligned} G : [a,b] \times [a,b] &\to \mathbb{R} \\ (t,s) &\to G(t,s) = \begin{cases} u(t,s) & \text{si } a \leq t \leq s \leq b \\ v(t,s) & \text{si } a \leq s \leq t \leq b, \end{cases} \end{aligned}$$

donde $v : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ está dada por $(t,s) \mapsto v(t,s) = u(t,s) + w(t,s)$, para $t, s \in [a,b]$. Si $h \in C([a,b])$, entonces

$$w(t) = \int_a^b G(t,s)\, h(s)\, \mathrm{d}s \qquad \forall t \in [a,b],$$

define la única solución del PVF no homogéneo

$$\begin{cases} Lw = h(t) \quad \text{en }]a,b[\\ \bar{\alpha}w(a) - \bar{\beta}w'(a) = 0 \\ \bar{\gamma}w(b) + \bar{\delta}w'(b) = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Además, para cada $s \in [a,b]$ dado, $v(\cdot,s)$ es una solución del problema

$$\begin{cases} Lv(\cdot,s) = 0 \quad \text{en }]a,b[\\ \bar{\gamma}v(b,s) - \bar{\delta}v'(b,s) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

DEFINICIÓN 2.2.1 La función G en el Teorema 2.2.6 se denomina *función de Green* del PVF (2.3).

TEOREMA 2.2.4 Asumamos que el PVF (2.3) posee una única solución que es la trivial. Entonces, la solución del PVF (2.4) está dada por

$$x(t) = z(t) + \int_a^b G(t,s)\, h(s)\, \mathrm{d}s,$$

donde G es la función de Green del PVF (2.3) y z es la solución del PVF

$$\begin{cases} Lz = 0 \quad \text{en }]a,b[\\ \bar{\alpha} z(a) - \bar{\beta} z'(a) = A \\ \bar{\gamma} z(b) + \bar{\delta} z'(b) = B. \end{cases} \tag{2.9}$$

TEOREMA 2.2.5 Sea $p \in C^1([a,b])$ tal que $p > 0$ en $[a,b]$ y consideramos el valor

$$\rho = \bar{\alpha}\,\bar{\gamma} \int_a^b \frac{1}{p(s)}\, \mathrm{d}s + \frac{\bar{\beta}\,\bar{\gamma}}{p(a)} + \frac{\bar{\alpha}\,\bar{\gamma}}{p(b)},$$

donde $\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 > 0$ y $\bar{\gamma}^2 + \bar{\delta}^2 > 0$. Entonces, el PVF

$$\begin{cases} (p(t)x')' = 0 \quad \text{en }]a,b[\\ \bar{\alpha} x(a) - \bar{\beta} x'(a) = 0 \\ \bar{\gamma} x(b) + \bar{\delta} x'(b) = 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

posee una única solución que es la trivial si y sólo si $\rho \neq 0$.

TEOREMA 2.2.6 La función de Green del PVF

$$\begin{cases} x'' = 0 \quad \text{en }]a,b[\\ x(a) = 0 \\ x(b) = 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

está dada por

$$(t,s) \mapsto G(t,s) = \begin{cases} -\frac{(t-a)(b-s)}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq s \leq b \\ -\frac{(s-a)(b-t)}{b-a} & \text{si } a \leq s \leq t \leq b. \end{cases}$$

Además, se verifica que G es simétrica y satisface,

i) $-\dfrac{b-a}{4} \leq G(t,s) \leq 0 \qquad \forall t,s \in [a,b],$

ii) $\displaystyle\int_a^b |G(t,s)|\, \mathrm{d}s \leq \frac{(b-a)^2}{8} \qquad \forall t \in [a,b],$

iii) $\displaystyle\int_a^b |G'(t,s)|\, \mathrm{d}s \leq \frac{(b-a)}{2} \qquad \forall t \in [a,b].$

El problema

Queremos estudiar el siguiente PVF no lineal,

$$\begin{cases} x'' = f(t,x) & \text{en }]a,b[\\ x(a) = A \\ x(b) = B, \end{cases} \tag{2.12}$$

donde $A, B \in \mathbb{R}$ son constantes.

TEOREMA 2.2.7 Sea $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, y sea $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que es uniformemente K-Lipschitz con respecto a la segunda variable; es decir,

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K|x-y| \qquad \forall (t,x),(t,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}.$$

Si asumimos que

$$b - a < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{K}},$$

entonces el PVF (2.12) posee una única solución.

2.2.3. Existencia de soluciones de un problema semilineal elíptico

Queremos resolver el siguiente PVF semilineal elíptico,

$$\begin{cases} -\Delta u + g(\nabla u) + \lambda u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.13}$$

donde Ω es un conjunto acotado en $\mathbb{R}^N$ con $\partial\Omega$ de clase C^2, y $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función K–Lipstchiz continua, para alguna $K > 0$.

TEOREMA 2.2.8 Sea Ω un conjunto acotado en $\mathbb{R}^N$ con $\partial\Omega$ de clase C^2, sea $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, y sea $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función uniformemente K-Lipschitz; es decir,

$$|g(\xi_2) - g(\xi_1)| \leq K\|\xi_2 - \xi_1\| \qquad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N.$$

Si g satisface la condición de crecimiento

$$|g(\xi)| \leq K(\|\xi\| + 1) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, es un valor suficiente grande, entonces el PVF (2.13) posee al menos una solución $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Capítulo 3

Teoría del grado topológico

La teoría del grado topológico es una herramienta muy útil para estudiar la existencia de soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Nuestro principal interés es estudiar el grado topológico de Brouwer y algunas aplicaciones a ecuaciones diferenciales.

3.1. Preliminares

DEFINICIÓN 3.1.1 Una *curva* γ en $\mathbb{C}$ es una aplicación continua $\gamma : [c, d] \to \mathbb{C}$, de la forma

$$\gamma(t) = \xi(t) + i\eta(t) \qquad \forall t \in [c, d],$$

donde las funciones $\xi, \eta \in C([c, d])$. Además, llamamos, *traza de la curva* γ a su imagen Γ, *i.e.* $\Gamma = \gamma([a, b])$, y decimos que:

- γ es *un arco* si $\gamma : [c, d] \to \mathbb{C}$ es de clase C^1, *i.e.* $\xi, \eta \in C^1([c, d])$
- γ es *simple* si
$$t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$$
salvo tal vez para el par $(t_1, t_2) = (c, d)$.
- γ es *cerrada* si
$$\gamma(c) = \gamma(d).$$

OBSERVACIÓN 3.1.1 *La curva γ no es igual a su traza Γ, puesto que Γ es un conjunto en $\mathbb{C}$, mientras que γ es una aplicación continua que señala la forma en que el conjunto Γ es recorrido.*

PROPOSICIÓN 3.1.1 Sea $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ un arco cerrado y sea Γ su traza. Si $a \in \mathbb{C}$ es tal que $a \notin \Gamma$, entonces,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - a} \in \mathbb{Z}. \qquad (3.1)$$

NOTACIÓN 3.1.1 En la proposición previa, es usual escribir $n(\gamma, a)$ para referirse a la cantidad en (3.1); *i.e.*

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - a} \in \mathbb{Z}.$$

Este número $n(\gamma, a)$ es conocido como el *índice de γ con respecto al punto a*, e indica el número de vueltas que efectúa γ sobre Γ alrededor del punto a. Además, es usual decir que *la orientación del arco γ es positivo o negativo* según si dicho valor $n(\gamma, a)$ es respectivamente positivo o negativo.

PROPOSICIÓN 3.1.2 Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un arco cerrado y sea Γ su traza. Entonces la función $n_\gamma : \mathbb{C} \setminus \Gamma \to \mathbb{Z}$ definida por

$$a \mapsto n_\gamma(a) = n(\gamma, a)$$

es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Además,

$$n_\gamma(a) = 0 \qquad \forall a \in \mathcal{U},$$

donde $\mathcal{U}$ es una componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

PROPOSICIÓN 3.1.3 Para cada $k \in \{1, 2\}$, consideremos los arcos cerrados $\gamma_k : [c_k, d_k] \to \mathbb{C}$ de traza Γ_k. Si ambas curvas tienen igual punto inicial, entonces

i) $n(\gamma_1, a) = -n(-\gamma_1, a) \qquad \forall a \notin \Gamma_1$

ii) $n(\gamma_1 \vee \gamma_2, a) = n(\gamma_1, a) + n(\gamma_2, a) \qquad \forall a \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

3.2. El grado de Brouwer

Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un arco cerrado que posee orientación positiva y sea Γ su traza. Entonces, si $a \notin \Gamma$, se verifica que

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} \,\mathrm{d}t.$$

Notemos que si Ω es la región abierta en $\mathbb{C}$ que está encerrada por el arco γ, y $a \notin \Omega \cup \Gamma$, entonces $n(\gamma, a) = 0$. Por otro lado, suponiendo que para $a \in \Omega$ ocurre que cada vez que γ recorre Γ está dando una vuelta alrededor de a y el arco γ es tal que solamente en un conjunto finito de puntos en $[0,1]$, a saber $\{t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}, t_m = 1\}$, con $t_0 < t_1 < \ldots < t_m$, se verifica que

$$\gamma(0) = \gamma(t_1) = \ldots = \gamma(t_{m-1}) = t(1),$$

entonces γ ha de recorrer m veces Γ alrededor del punto a, *i.e*

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} \,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} \,\mathrm{d}t = m.$$

A continuación vamos a formular una definición para el grado topológico de una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, donde Ω es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, con respecto a un arco γ de traza $\partial\Omega$ y un punto a en $\mathbb{C} \setminus f(\partial\Omega)$.

DEFINICIÓN 3.2.1 Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ tal que $\partial\Omega$ es la traza de un arco cerrado γ, sea $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$. Si $a \notin f(\partial\Omega)$, entonces llamamos *grado de f con respecto a γ y a* a la cantidad

$$\deg(f, \gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f\circ\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z-a}\,.$$

En la definición previa, es claro que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{f\circ\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \int_0^1 \frac{f'\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)}{f\big(\gamma(t)\big)-a}\mathrm{d}t,$$

es el número de veces que $f \circ \gamma$ recorre $f(\partial\Omega)$ alrededor del punto a.

EJEMPLO 3.2.1 Sea $D(0,1)$ el disco abierto unitario en $\mathbb{C}$ y sea $S^1 = \partial D(0,1)$ su frontera. Sea $f : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{C}$ la función definida por $f(z) = z^n$ para toda $z \in \overline{D(0,1)}$ y sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ el arco cerrado definido por $t \mapsto \gamma(t) = e^{2\pi i t}$. Calcula $\deg(f, \gamma, 0)$.

Notemos que en el grado definido, pudimos considerar $\mathbb{R}^2$ en vez de $\mathbb{C}$, pues $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

Nuestra intención es extender este concepto (número de vueltas que da $f \circ \gamma$ sobre $\partial\Omega$ en torno a a), a funciones $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y puntos $a \in \mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$. Más específicamente, pretendemos construir una función que denotamos por deg, con

$$\deg : \big\{(f, \Omega, a) : f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N), \Omega \text{ abierto y acotado en } \mathbb{R}^N : a \notin f(\partial\Omega)\big\} \to \mathbb{Z},$$

que verifique las siguientes propiedades

- *Normalización.* $\deg(I, \Omega, a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in \Omega \\ 0 & \text{si } a \notin \overline{\Omega} \end{cases}$

- *Aditividad.* Si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ son conjuntos abiertos acotados y disjuntos tales que

  $$a \in f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$$

  entonces

  $$\deg(f, \Omega, a) = \deg(f, \Omega_1, a) + \deg(f, \Omega_2, a)$$

- *Invarianza bajo homotopías.* Si $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ es una aplicación continua e $y : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ es una aplicación continua tal que $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$, entonces

  $$\deg(h(t,\cdot), \Omega, y(t)) = c \qquad \forall t \in [0,1],$$

  para alguna constante c.

DEFINICIÓN 3.2.2 Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^N$ y sea $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Decimos que y es un *valor regular* de f si

$$(\forall x \in \Omega)\ \big(x \in f^{-1}(\{y\}) \ \Rightarrow\ f'(x) \text{ es invertible.}\big)$$

NOTACIÓN 3.2.1 Denotaremos por $J_f(x)$ al determinante de $f'(x)$, donde

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

pues $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, y

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_N(x) \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓN 3.2.3 Sea Ω un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^N$, sea $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y sea $y \notin f(\partial\Omega)$ un *valor regular* de f. Llamamos *grado de f con respecto a Ω y a y* al número entero

$$\deg(f, \Omega, y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \operatorname{sgn}(J_f(x)) & \text{si } f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing \\ 0 & \text{si } f^{-1}(\{y\}) = \varnothing \end{cases}$$

donde

$$\operatorname{sgn}(J_f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } J_f(x) > 0 \\ 0 & \text{si } J_f(x) = 0 \\ -1 & \text{si } J_f(x) < 0 \end{cases}$$

DEFINICIÓN 3.2.4 Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^N$ y sea $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Diremos que $y \in \mathbb{R}^N$ es un *valor singular* de f si

$$(\exists x \in f^{-1}(\{y\})) \text{ tal que } (J_f(x) = 0).$$

El resultado a continuación establece que existen pocos valores singulares cuando f es de clase C^1.

LEMA 3.2.1 (Lema de Sard) Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^N$ y sea $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Si

$$S = \{y \in \mathbb{R}^N : y \text{ es valor singular de } f\},$$

entonces S tiene medida de Lebesgue nula. (*i.e.* Si $\tilde{S} = \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$, entonces $f(\tilde{S}) = S$ tiene medida nula).

COROLARIO 3.2.1 El conjunto de valores regulares de f es denso en $\mathbb{R}^N$.

Gracias al Lema de Sard, veremos que es posible extender nuestra definición de grado $\deg(f,\Omega,y)$ quitando la condición que $y \in f(\partial\Omega)$ es un valor regular de f.

Para lograr nuestro objetivo, consideremos un conjunto Ω abierto y acotado en $\mathbb{R}^N$, una función $f \in C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ y un punto $y_0 \notin f(\partial\Omega)$. Pongamos

$$\rho = \operatorname{dist}(y_0, f(\partial\Omega) > 0.$$

Nuestra intención es probar lo siguiente:

$$\begin{gathered}\textit{Si } y_1 \textit{ e } y_2 \textit{ en } B(y_0,\rho) \textit{ son valores regulares de } f\textit{, entonces}\\ \deg(f,\Omega,y_1) = \deg(f,\Omega,y_2).\end{gathered} \tag{3.2}$$

En particular, si $\{y_n\}$ es una sucesión de valores regulares en $B(y_0,\rho)$ que converge a y_0 (tal sucesión existe gracias al Lema de Sard), entonces se verifica que

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ tal que } (\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow \deg(f,\Omega,y_n) = c)$$

donde c es una constante independiente de la sucesión de valores regulares $\{y_n\}$ en $B(y_0,\rho)$ convergente a y_0 que se considere.

Una vez que logremos probar lo previamente señalado, podremos definir el grado de f con respecto a Ω y a y, con y no necesariamente un valor regular de f, de la siguiente forma:

$$\deg(f,\Omega,y_0) = \lim_{n\to\infty} \deg(f,\Omega,y_n) = c.$$

Con la finalidad de alcanzar nuestro objetivo, introducimos una representación integral de $\mathrm{d}(f,\Omega,y)$, con y siendo un valor regular de f.

LEMA 3.2.2 Sea Ω un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^N$, sea $f \in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ y sea $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una función tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B(0,1)$ y tal que $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(z)\,\mathrm{d}z = 1$. Si $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es la función definida por

$$y \mapsto \varphi_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^N}\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right),$$

(y por lo tanto verifica que $\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset B(0,\varepsilon)$ y que $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z = 1$), entonces

$$(\exists \varepsilon_0 = \varepsilon(f,y)) \text{ tal que } \left(\deg(f,\Omega,y) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x)-y)J_f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall \varepsilon \in]0,\varepsilon_0[\right)$$

Recordemos nuestro propósito, queremos probar que (3.2) se cumple. Gracias al lema previo, nos bastará con probar que

$$\int_\Omega (\varphi_\varepsilon(f(x)-y_1) - \varphi_\varepsilon(f(x)-y_2))J_f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

En verdad, probaremos que se cumple lo siguiente:

PROPOSICIÓN 3.2.1 Sea Ω un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^N$, sea $f \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, sea $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ la función definida en el Lema 3.2.2 y sea $y_0 \notin f(\partial\Omega)$. Si $\rho = \mathrm{dist}(y_0, f(\partial\Omega) > 0$ e $y_1, y_2 \in B(y_0, \rho)$ son dos valores regulares de f dados, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ existe $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ con $\overline{\mathrm{supp}(v)} \subset \Omega$ tal que

$$\mathrm{div}(v(x)) = h(x),$$

donde $h : \Omega \to \mathbb{R}^N$ es la función definida por

$$x \mapsto h(x) = \varphi_\varepsilon(f(x) - y_1) - \varphi_\varepsilon(f(x) - y_2))J_f(x).$$

Notemos que si extendemos la función v de la proposición previa a todo $\mathbb{R}^N$, mediante la extensión trivial $v = 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, entonces

$$\int_\Omega h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{div}(v(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v \cdot \hat{n}\,\mathrm{d}S = 0,$$

que es lo que buscamos.

Ahora podemos definir el grado para funciones $f \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ en valores no necesariamente regulares $y \in f(\partial\Omega)$ en la forma que se señaló antes, notando que

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, \bar{y})$$

donde $\bar{y}$ es cualquier valor regular de f que está en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$ que y.

Nuestro siguiente paso será definir el grado de f respecto a Ω e $y \notin f(\partial\Omega)$ para funciones $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Para ello, usaremos el hecho que $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ es denso en $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ para la norma del supremo. Los siguientes resultados apuntan en esta dirección.

LEMA 3.2.3 Sea Ω un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^N$, sean $g_1, g_2 \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y sea $y \notin g_1(\partial\Omega)$. Entonces

$$(\exists \delta > 0) \text{ tal que } (\forall t \in \mathbb{R})(|t| < \delta \Rightarrow \deg(g_1 + tg_2, \Omega, y) = \deg(g_1, \Omega, y)).$$

PROPOSICIÓN 3.2.2 Sea Ω un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^N$, sea $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, sea $y \notin f(\partial\Omega)$ y sean $g_i \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $i = 1, 2$, tales que

$$\|g_i - f\|_\infty < \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega))$$

para $i = 1, 2$. Entonces

$$\deg(g_1, \Omega, y) = \deg(g_2, \Omega, y).$$

Con los resultados previos, obtenemos que si $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $y \notin f(\partial\Omega)$, entonces

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f_1, \Omega, y) \qquad \forall f_1 \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \text{ tal que } \|f - f_1\|_\infty < \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)).$$

3.2.1. Propiedades del grado de Brouwer

El siguiente teorema resume las principales propiedades que satisface el grado de Brouwer.

TEOREMA 3.2.1 (Propiedades del grado de Brouwer) Sea

$$\mathcal{M} = (f, \Omega, y) : \Omega \text{ es un conjunto abierto y acotado en } \mathbb{R}^N \quad \wedge \quad f \in C(\overline{\Omega}) \quad \wedge \quad y \notin f(\partial\Omega)$$

y sea $\deg : \mathcal{M} \to \mathbb{Z}$ el grado de Brouwer definido previamente. Entonces, $\deg$ satisface las siguientes propiedades:

(1) **Normalización**; *i.e.*,

$$\deg(Id, \Omega, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \Omega \\ 0 & \text{si } y \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

(2) **Aditividad**; *i.e.*, si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ son conjuntos abiertos disjuntos tales que $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, entonces

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_1, y) + \deg(f, \Omega_2, y).$$

(3) **Escisión**; *i.e.*, como una consecuencia de la aditividad, si K es un conjunto compacto en $\overline{\Omega}$ e $y \notin f(K) \cup f(\partial\Omega)$, entonces

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega \setminus K, y).$$

(4) **Continuidad con respecto a la función**; *i.e.*, fijada $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $y \notin f(\partial\Omega)$, existe una vecindad $\mathcal{V}$ de f en $C((\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, bajo la norma del supremo, tal que

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, y) \qquad \forall g \in \mathcal{V}.$$

(5) **Invarianza en componentes conexas**; *i.e.*, si y_1 e y_2 pertenecen a la misma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$, entonces

$$\deg(f, \Omega, y_1) = \deg(f, \Omega, y_2).$$

(6) **Existencia de Kronecker**; *i.e.*, si $y \notin f(\partial\Omega)$ y $\deg(f, \Omega, y) \neq 0$, entonces

$$(\exists x_0 \in \Omega) \text{ tal que } f(x_0) = y \text{ (o bien } f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing).$$

(7) **Invarianza bajo homotopías**; *i.e.* si $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ es continua, $y : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ es continua e $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ para toda $t \in [0,1]$, entonces

$$\deg(h(t, \cdot), \Omega, y(t)) \text{ es constante en } t \in [0,1].$$

3.3. Aplicaciones del grado

TEOREMA 3.3.1 (Teorema del punto fijo de Brouwer) Sea $B(0,R)$ la bola abierta de centro en el origen y radio R contenida en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, y sea $T : \overline{B(0,R)} \to \overline{B(0,R)}$ un operador continuo. Entonces T posee al menos un punto fijo $\bar{x} \in \overline{B(0,R)}$, *i.e.*

$$\exists\, \bar{x} \in \overline{B(0,R)} \quad \text{tal que} \quad T(\bar{x}) = \bar{x}.$$

COROLARIO 3.3.1 (Teorema del punto fijo de Brouwer generalizado) Sea K un conjunto compacto y convexo en $\mathbb{R}^N$, y sea $f \in C(K,K)$. Entonces

$$\exists \bar{x} \text{ tal que } f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

COROLARIO 3.3.2 (Criterio de sobreyectividad) Sea $f \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$\frac{\langle f(x), x\rangle}{|x|} \to \infty \qquad \text{cuando } |x| \to \infty.$$

Entonces f es sobreyectiva; *i.e.*

$$f(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N.$$

TEOREMA 3.3.2 (Teorema de Borsuk) Sea Ω un conjunto abierto, acotado y simétrico en $\mathbb{R}^N$, y sea $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ una función continua e impar tal que $0 \notin f(\partial\Omega)$. Entonces,

$$\deg(f, \Omega, 0) \in \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es impar}\}.$$

Bibliografía

[1] Chang, K.-Ch., Methods in Nonlinear Analysis, *Springer Monographs in Mathematics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. First edition 2005. Printed in The Netherlands.

[2] Chicone, C., Ordinary Differential Equations with Applications, *Texts in Applied Mathematics 34*, Springer Science+Business Media, Inc. Second edition 2006. Printed in the United States of America.

[3] Evans, L.C., Partial Differential Equations, *Graduate Studies in Mathematics 19*, American Mathematical Society. Reprinted of the first edition with corrections 2002. Printed in the United States of America.

[4] Kielhöfer, H., Bifurcation Theory. An Introduction with Applications to PDEs, *Applied Mathematical Sciences 156*, Springer-Verlag New York, Inc. First edition 2004. Printed in the United States of America.

[5] Struwe, M., Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics 34*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Fourth edition 2008. Printed in Germany.